Proyecto de investigación: Métodos de Funciones Radiales para la Solución de EDP

http://www.dci.dgsca.unam.mx/pderbf/

Solución al problema de Poisson usando Spline de Capa Delgada y funciones Multicuádricas [1]

Objetivo: Ilustrar mediante un ejemplo simple el uso del método de colocación asimétrico mediente funciones de base radial. El material contiene: la definición del problema continuo: Poisson con condiciónes de Dirichlet, la exposicón del método de colocación, la forma de aplicarlo al problema de Poisson y la forma de correr los programas tanto en matlab como en C++. Los códigos correspondientes se encuentran en la pagina del proyecto, sección Docencia.

Definición del Problema

Se desea resolver el problema de Poisson en el dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ planteado como sigue:

$$\begin{aligned} \triangle u(\bar{x}) &= f \quad \bar{x} \in \Omega \\ u(\bar{x}) &= g \quad \bar{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

donde el operador $\triangle$ es el laplaciano. Como ejemplo, el problema se plantea con las funciones f y g dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{2(1.25 + cos(5.4y))(108x - 36)^2}{(6 + 6(3x-1)^2)^3} - \frac{108(1.25 + cos(5.4y))}{(6 + 6(3x-1)^2)^2} - \frac{29.16cos(5.4y)}{6 + 6(3x-1)^2} \\ g(x,y) &= \frac{1.25 + cos(5.4y)}{6 + 6(3x-1)^2} \end{aligned}$$

donde los dominios de f y g son Ω y $\partial\Omega$, respectivamente. Debemos notar que si definimos:

$$u_0(x,y) = \frac{1.25 + cos(5.4y)}{6 + 6(3x-1)^2} \quad (x,y) \in \Omega$$

entonces $u_0(x,y)$ es solución al problema de Poisson definido anteriormente.

[1] Material elaborado en el curso: Métodos numéricos para la solución de EDP mediante Funciones de base Radial, Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, 2007, impartido por el Dr. Pedro González Casanova. Alumnos participantes: Diego A. Ayala Rodriguez y Francisco J. Martinez.

Algoritmo: Colocación Asimetrica

Para resolver el problema planteado, se usarán funciones de base radial, con dos tipos de Kernel reproductor:

1. $\phi(r) = ||r||^4 log(||r||)$ al cual denominamos Spline de Capa Delgada (TPS)
2. $\phi(r) = \sqrt{||r||^2 + c^2}$ $c \in \mathbb{R}$ denominada función multicuádrica (MQ)

donde $|| \cdot ||$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$.
Para iniciar, supongamos que se tiene un conjunto de N puntos en $\mathbb{R}^2$ distribuidos en dos subconjuntos definidos como:

$$\begin{aligned} X_I &= \{r_i \in \Omega\} \quad i = 1 \dots N_I \\ X_B &= \{r_i \in \partial\Omega\} \quad i = N_I + 1 \dots N \end{aligned}$$

con $r_i = (x_i, y_i)$ y $N_I < N$. Sea $X_T = X_I \cup X_B$. Suponemos ahora que una aproximación a la solución del problema de Poisson está dada por la siguiente expresión:

$$\tilde{u}(r) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(r - r_j) + P^2(r)$$

donde los coeficientes λ_j deben ser determinados, $\phi(r - r_j)$ es cualquiera de las funciones mencionadas anteriormente (TPS ó MQ) y $P^2(r)$ es un polinomio general de grado 2 en el plano. Recordemos que un polinomio general de orden 2 es de la forma:

$$P^2(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2$$

De esta manera, se tienen $N+6$ incógnitas por determinar: cada uno de los λ_j, $j = 1 \dots N$ y los coeficientes α_k, $k = 1 \dots 6$ del polinomio P^2. Definamos los vectores $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]^T$ y $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_6]^T$.
Insertando la definición de $\tilde{u}$ en el problema de Poisson y evaluando en cada punto del conjunto X_T se tiene:

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \triangle\phi(r_i - r_j) + \triangle P^2(r_i) = f(r_i) \quad r_i \in X_I$$

con condición de frontera dada por:

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(r_i - r_j) + P^2(r_i) = g(r_i) \quad r_i \in X_B$$

Notemos que hasta ahora tenemos N ecuaciones (pues el total de puntos en X_T es N) para $N+6$ incógnitas. Las otras seis ecuaciones necesarias para encontrar soluciones únicas para λ y α se obtienen usando las siguientes condiciones:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i^2 = 0$$

Con las condiciones anteriores obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} M_L & P_L \\ M_B & P_B \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{array}{lll} (M_L)_{i,j} & = \triangle\phi(r_i - r_j) & r_i \in X_I,\ r_j \in X_T \\ (M_B)_{i-N_I,j} & = \phi(r_i - r_j) & r_i \in X_B,\ r_j \in X_T \\ (P_L)_{i,j} & = \triangle p_j(r_i) & r_i \in X_I,\ j = 1..6 \\ (P_B)_{i-N_I,j} & = p_j(r_i) & r_i \in X_B,\ j = 1..6 \\ (P)_{i,j} & = p_j(r_i) & r_i \in X_T,\ j = 1..6 \end{array}$$

donde p_j es cada uno de los términos que aparecen en el polinomio general de orden 2.

Instrucciónes para correr los ejemplos I y II tanto en matlab como en C++

Matlab

1 Bajar la carpeta comprimida ubicada en la sección de docencia - Codigos en Matlab - programas para la resolver la ecuacion de Poisson - Rutina principal y auxiliares(comprimido)

2 Descomprimir la carpeta, una vez hecho esto abrir Matlab, abrir cada archivo de la carpeta y guardar todos los archivos en la carpeta work de Matlab, por ejemplo, si abrimos el archivo gna.m (ya en Matlab) elegimos la opción guardar como, buscamos la opción Disco local C (esto depende de donde se haya instalado Matlab, puede ser otra unidad) abrimos la carpeta MATLAB y ahí debe estar work.

3 Ubicarse en la ventana de comandos de Matlab. Para correr el programa, solo hay que teclear:

ucm_thinplate (50,50)

Una vez que termina la ejecución del programa se desplegara la figura 1.

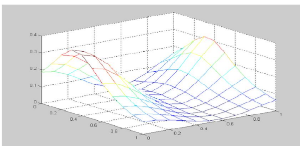


figura 1

Para correr el ejemplo multicuadratico(M,Q) solo hay que teclear:

ucm_multquad (50, 50, 20)

Una vez que termina la ejecución del programa se desplegara la figura 2.

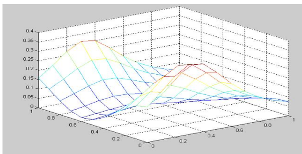


figura 2

C++ Windows

Para compilar el programa en windows, usamos Dev C++ (se puede obtener la verción gratuita de Dev C++ en la siguiente pagina: http://www.uptodown.com/buscar/bloodshed-dev-c++/) Para visualizar los resultados de forma gráfica usamos, gnuplot

1 Una vez instalados los programas, se debe bajar la carpeta comprimida, ubicada en la sección de docencia - Codigos en C++ - programas para la interpolación de superficies - Rutina principal y auxiliares(comprimido)

2 Ya que se guardo la carpeta es necesario descomprimirla. Despues abir la carpeta, al hacer esto se tiene acceso a los archivos contenidos en la misma, entre ellos se encuentra un archivo llamado *Pry.Poisson(24)* que tiene un logotipo como el que se muestra en la figura 3:

figura 3

3 Seleccionar el archivo *Pry.Poisson(24)* y abrirlo.

Al abrir *Pry.Poisson* se abrirá Dev C++ mostrando en el lado izquierdo de la pantalla una serie de archivos, de los cuales se debe elegir y abrir main.cpp(haciendo doble cilck con el ratón).
Para poder ejecutar el programa primero se debe compilar, seleccionando el menú ejecutar - compilar.
El programa requiere de argumentos para poder funcionar correctamente, que en este caso

son: el número de puntos interiores, el número de puntos frontera, el nombre del archivo donde se podran ver los resultados y el tamaño de la malla.
Para pasar estos argumentos al programa, seleccione en el menú ejecutar - Argumentos del programa, en el proyecto ya estan los argumentos establecidos, como se muestra en la figura 4.

figura 4

En este ejemplo se trabaja con 50 puntos interiores, 50 puntos frontera, el nombre del archivo es ejemplo.txt y el tamaño de la malla es de 20x20.
Si se desea, se pueden cambiar los argumentos del programa desde dicha ventana.

5 Para ejecutar el programa, en el menú ejecutar selecionamos la opción ejecutar .

6 El archivo de salida, ejemplo.txt de la ejecución se encuentra en la carpeta que se abrio al principio.

Nota : si se desea visualizar los resultados de forma gráfica, abrir la carpeta de gnuplot, ubicar el icono :

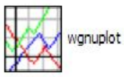
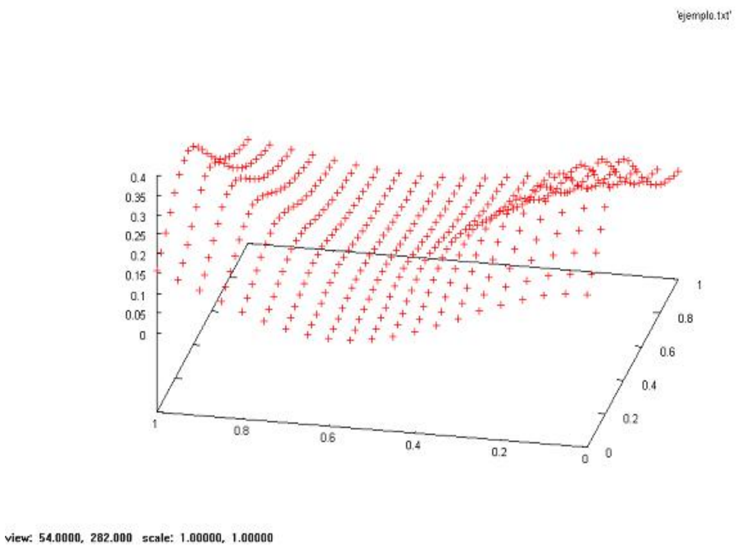


figura 5

y hacer doble click, para abrir la ventana de comandos.

Para ubicar la carpeta donde esta el archivo de salida, seleccionar el menú - ChDir, y buscar la carpeta donde esta el archivo ejemplo.txt.

Para graficar, se debe teclear en la ventana de comandos la siguiente instrucción: splot'ejemplo.txt'
Aparecera entonces la superficie generada:


'ejemplo.txt'
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
view: 54.0000, 282.000 scale: 1.00000, 1.00000