

# Métodos de funciones de Base Radial para la solución de EDP

PEDRO GONZÁLEZ-CASANOVA\*

UICA-DGSCA, UNAM

MAYO 2008

Estas notas constituyen un primer esfuerzo por presentar algunos de los resultados mas significativos de la teoría, así como de los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales mediante funciones de base radial. En su estado actual, esta nota pretende recolectar algunos de los elementos teóricos y algorítmicos mas relevantes.

---

\*Quiero agradecer a Maria Jocelyn Lizzett Hernandez Romero por haberme ayudado con la traducción de estas notas que originalmente fueron escritas en ingles.

# Tabla de Contenido

1. Interpolación Multivariada con RBF
  - 1.1. El problema
  - 1.2. Un Enfoque Algebraico
  - 1.3. Un Enfoque Hilbertiano
  - 1.4. Del Spline Cúbico al Spline de Capa Delgada.
  - 1.5. Estimación de error en espacios Nativos
  - 1.6. Métodos de Precondicionamiento
2. Métodos para la Quasinterpolación Multivariada
  - 2.1. Ejemplo: Quasi Interpolante Discreto y semi discreto
3. Solución Numérica de PDE con RBF
  - 3.1. Colocación Asimétrica
  - 3.2. Colocación Simétrica
  - 3.3. Método de Cuadratura Diferencial
4. Referencias

## 1. Interpolación Multivariada con RBF

En esta sección estudiaremos bajo que condiciones el problema de interpolación mediante Funciones de base radial, RBF, esta bien planteado. Para ello dividiremos la exposición en dos enfoques; uno algebraico y uno Hilbertiano. También serán revisados el error de los interpolantes en espacios nativos así como los métodos de preconditionamiento del correspondiente sistema algebraico.

### 1.1. El problema

**Definición 1** Una función  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada radial, si existe una función invariante  $\phi : [0, \infty)$  tal que:

$$\Phi(x) = \phi(r), \quad \text{donde } r = \|x\|,$$

y  $\|\cdot\|$  es la norma Euclidiana  $\mathbb{R}^d$ .

Considere la siguiente definición de anizat dada por:

$$s(x) = p(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi(x_j, x) \quad (1)$$

donde  $p \in \mathbb{P}^l$  es un polinomio de grado  $l$  en  $\mathbb{R}^d$ , sujeto a la condición

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j p(x_j) = 0. \quad (2)$$

**Problema I** Dados  $m$  nodos distintos  $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^d$  unisolventes con respecto a los polinomios de grado a lo más  $d - 1$ , y un vector  $\bar{u} \in \mathbb{R}^d$ , encontrar una función  $s$  de la forma dada por (1) y (2), que cumpla las condiciones de interpolación:

$$s(x_i) = u_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Sea  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  una base de  $\mathbb{P}^l(\mathbb{R}^d)$ . Entonces, el correspondiente sistema de ecuaciones puede ser escrito en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde

$$A_{i,j} = \Phi(x_i, x_j) \quad i, j = 1, \dots, m \quad (4)$$

y

$$P_{i,j} = p_j(x_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m \quad (5)$$

## 1.2. Un Enfoque Algebraico

**Definición 2** Diremos que una matriz real simétrica  $A$  es semidefinida positiva, si su forma cuadrática asociada es no-negativa, i.e.,

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k a_{jk} \geq 0 \quad (6)$$

para  $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^N$ . En particular, si el único vector  $c$ , que satisface en (6) la igualdad, es el vector cero, entonces, diremos que  $A$  es definida positiva.

Una propiedad importante de las matrices positivas definidas, es que todos sus valores propios son positivos y en consecuencia dichas matrices son necesariamente no-singulares.

Por lo tanto, si tenemos una función radial  $\Phi$  en la expresión (1) cuya matriz asociada al problema de interpolación es positiva definida, **tendremos que el correspondiente problema de interpolación siempre esta bien planteado.**

**Definición 3** Una función continua real valuada  $\Phi$  es positiva definida en  $\mathbb{R}^d$  si y solo si es par y

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0 \quad (7)$$

para cualesquiera  $N$  puntos diferentes  $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$  y  $c = [c_1, \dots, c_N] \in \mathbb{R}^d$ . La función  $\Phi$  es estrictamente definida positiva en  $\mathbb{R}^d$ , si el único vector  $c$  que en (7) cumple la igualdad es el vector cero.

**Definición 4** Una función  $\phi : [0, \infty)$  que pertenece a  $C[0, \infty) \cap C^\infty(0, \infty)$  y que satisface:

$$(-1)^l \phi^{(l)}(r) \geq 0, \quad r > 0, l = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

es llamada función completamente monótona en  $[0, \infty)$ .

En 1938 Schoenberg, fue el primero en relacionar el concepto de función positiva definida, con el de completamente monótona, como se muestra en el siguiente Teorema:

**Teorema 1** *Si la función  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es completamente monótona pero no constante, entonces:  $\phi(\|\cdot\|^2)$  es estrictamente positiva definida y es una función radial en  $\mathbb{R}^d$  para toda  $d$ .*

Hasta este punto hemos tratado con funciones positivas y estrictamente positivas definidas. Introduciremos ahora la definición más general de función condicional positiva definida de orden  $m$ , lo que permita dar una caracterización más general del problema de interpolación (1) y (2).

**Definición 5** *Una función continua real  $\Phi$  es llamada condicionalmente positiva definida en  $\mathbb{R}^d$  de orden  $m$  en  $\mathbb{R}^d$  si:*

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0 \quad (9)$$

para cualesquiera  $N$  puntos diferentes  $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$  y  $c = [c_1, \dots, c_N] \in \mathbb{R}^d$  se cumple que:

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^\alpha = 0 \quad |\alpha| < m, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad (10)$$

La función  $\Phi$ , es llamada estrictamente condicional positiva definida de orden  $m$  si los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$  son distintos y  $c \neq 0$  implica la desigualdad estricta en (9).

**Teorema 2** *Sea  $\phi \in C[0, \infty) \cap C^\infty(0, \infty)$ . Entonces la función radial en  $\mathbb{R}^d$  para toda  $d$ ,  $\Phi = \phi(\|\cdot\|^2)$  es condicional positiva definida de orden  $m$  si y solo si,  $(-1)^m \phi^{(m)}$  es completamente monótona en  $(0, \infty)$ .*

**Teorema 3** *Si  $\phi$  es como en el Teorema 2 y no es un polinomio de grado a lo más  $m$ , entonces  $\Phi$  es estrictamente condicional positiva definida de orden  $m$  y es una función radial en  $\mathbb{R}^d$  para toda  $d$ .*

**Algunos ejemplos:**

1. Las funciones:

$$\phi(r) = (-1)^{\lceil\beta\rceil} (r + \alpha^2)^\beta, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \beta \neq \mathbb{N}$$

implican que:

$$\phi^{(k)}(r) = (-1)^{\lceil\beta\rceil} \beta(\beta-1)\dots(\beta-\lceil\beta\rceil+1)(r+\alpha^2)^{\beta-k}$$

así:

$$(-1)^{\lceil\beta\rceil} \phi^{(\lceil\beta\rceil)}(r) = (\beta-1)\dots(\beta-\lceil\beta\rceil+1)(r+\alpha^2)^{\beta-\lceil\beta\rceil}$$

es completamente monótona. Además,  $m = \lceil\beta\rceil$  es la  $m$  más pequeña, para la cual  $(-1)^m \phi^m$  es completamente monótona. Por lo tanto, el multicuadrado

$$\Phi(r) = (-1)^{\lceil\beta\rceil} (r^2 + \alpha^2)^\beta, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

es estrictamente condicional definido positivo de orden  $m \geq \lceil\beta\rceil$  y es radial en  $\mathbb{R}^d$  para toda  $d$ .

2. Las funciones

$$\Phi^r(r) = (-1)^{\lceil\beta/2\rceil} r^{\lceil\beta/2\rceil}, \quad \beta > 0, \beta \neq 2\mathbb{N}$$

implican que:

$$\phi^{(k)}(r) = (-1)^{\lceil\beta/2\rceil} \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\beta}{2} - k + 1\right) \frac{\beta}{2} - k$$

así,  $(-1)^{\lceil\beta/2\rceil} \phi^{(\lceil\beta/2\rceil)}$  es completamente monótona y  $m = \lceil\beta/2\rceil$  es la  $m$  más pequeña, tal que  $(-1)^m \phi^m$  es completamente monótona. Por lo tanto, las potencias:

$$\Phi(r) = (-1)^{\lceil\beta/2\rceil} r^{\lceil\beta\rceil}, \quad \beta > 0, \beta \neq 2\mathbb{N}$$

son estrictamente condicional definidas positivas de orden  $m \geq \lceil\beta\rceil$  y son radiales en  $\mathbb{R}^d$  para toda  $d$ .

3. El spline de capa delgada

$$\Phi(\|x\|) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|, \quad k \in \mathbb{N}$$

es estrictamente condicional definido positivamente de orden  $m \geq k+1$  y es radial en  $\mathbb{R}^d$  para toda  $d$ . Para ver esto observamos que :

$$2\Phi(r) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

por lo tanto, tenemos que:

$$\phi(r) = (-1)^{k+1} r^{2k} \log r, \quad k \in \mathbb{N}$$

y así:

$$\phi^{(l)} = (-1)^{k+1} k(k-1)\dots(k-l+1) r^{k-l} \log r + p_l(r), \quad 1 \leq l \leq k$$

con  $p_l$  un polinomio de grado  $k-l$ . Así,

$$\phi^{(k)}(r) = (-1)^{k+1} k! \log r + C$$

y

$$\phi^{(k+1)}(r) = (-1)^{k+1} \frac{k!}{r}$$

son completamente monótonas en  $(0, \infty)$ .



### 1.3. Un Enfoque Hilbertiano

**Definición 6** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert, de funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Una función  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada kernel reproductor de  $\mathcal{H}$  si:

1.  $K(x, \cdot) \in \mathcal{H}$  para toda  $x \in \Omega$ ,
2.  $f(x) = \langle f, K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}$  para toda  $f \in \mathcal{H}$  y toda  $x \in \Omega$

**Teorema 4** Supongamos que  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert de funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con kernel reproductor  $K$  y  $\mathcal{H}^*$  es su espacio dual, i.e., el espacio de funcionales lineales en  $\mathcal{H}$ . Tenemos entonces que:

1.  $K(x, y) = \langle K(x, \cdot), K(\cdot, y) \rangle_{\mathcal{H}}$  para  $x, y \in \Omega$ .
2.  $K(x, y) = K(y, x)$  para  $x, y \in \Omega$ .
3.  $\mathcal{H}$  es continuamente encajable en  $C^0(\Omega)$ .

Primero notemos que la Definición 6 implica que  $\mathcal{H}$  contiene todas las funciones de la forma:

$$f = \sum_{j=1}^N c_j K(x_j, \cdot)$$

siempre que  $x_j \in \Omega$ . El Teorema (4) implica que:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{H}} &= \langle f, f \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{j=1}^N c_j K(x_j, \cdot), \sum_{k=1}^N c_k K(\cdot, x_k) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \langle K(x_j, \cdot), K(\cdot, x_k) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k K(x_j, x_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, definimos el espacio:

$$H_k(\Omega) = \text{span}\{K(\cdot, y) : y \in \Omega\}$$

con la forma bilineal asociada:

$$\left\langle \sum_{j=1}^N c_j K(x_j, \cdot), \sum_{k=1}^N d_k K(\cdot, y_k) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j d_k K(x_j, y_k).$$

**Teorema 5** Si  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es un Kernel simétrico estrictamente definido positivo, entonces la forma bilineal:  $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  define un producto interior en  $H_k(\Omega)$ . Más adelante, veremos que  $H_k(\Omega)$  es un espacio pre-Hilbertiano con kernel reproductor  $K$ .

El espacio nativo  $\mathcal{N}_k(\Omega)$  de  $K$ , se define como la completación de  $H_k(\Omega)$  con respecto a la  $K$ -norma  $\| \cdot \|_K$ , con lo cual  $\|f\|_K = \|f\|_{\mathcal{N}_k(\Omega)}$  para toda  $f \in H_k(\Omega)$ . Notemos que los resultados anteriores han sido definidos para espacios de Hilbert en un dominio abierto acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , en los párrafos que siguen y con objeto de simplificar la exposición consideraremos el caso particular para el que  $\Omega$  se define como  $\mathbb{R}^d$ .

En este caso especial, i.e., cuando tratamos con funciones estrictamente positivas definidas ( invariantes ante translaciones)  $\Phi(x-y) = K(x, y)$  y  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , el siguiente Teorema, nos da una caracterización de el espacio nativo en términos de la Transformada de Fourier.

**Teorema 6** Supongamos que  $\Phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$  es una función real-valuada estrictamente positiva definida. Definamos:

$$\mathcal{G} = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^d) \right\} \cap C(\mathbb{R}^d) : \frac{\hat{f}}{\sqrt{\hat{\Phi}}} \in L_2(\mathbb{R}^d)$$

si dotamos a este espacio, con la forma bilineal:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{G}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \frac{\hat{f}}{\sqrt{\hat{\Phi}}}, \frac{\hat{g}}{\sqrt{\hat{\Phi}}} \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)}}{\hat{\Phi}(\omega)} d\omega$$

entonces  $\mathcal{G}$ , es un espacio de Hilbert real con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$  y kernel reproductor  $\Phi(\cdot - \cdot)$ . En consecuencia  $\mathcal{G}$  es el espacio nativo de  $\Phi$  en  $\mathbb{R}^d$ , i.e.,  $\mathcal{G} = \mathcal{N}_{\Phi}(\mathbb{R}^d)$  y ambos productos interiores coinciden.

### 1.4. Del Spline Cúbico al Spline de Capa Delgada.

En esta sección primero explicaremos en general, como *dado un espacio de Hilbert* podemos obtener la función spline. Para ilustrar dicho proceso usaremos el spline cúbico y el de capa delgada. Note que en general no siempre se tiene un espacio de Hilbert asociado a una función radial dada, por lo que en esta sección explicaremos, además, como se construye un espacio de Hilbert a partir de una función radial.

#### **Dado un espacio de Hilbert, obtener el Spline Interpolante**

Recordemos primero el Teorema clásico de la proyección ortogonal en un espacio de Hilbert.

**Teorema 7** *Sea  $W$  un subespacio de un espacio  $\mathcal{H}$  de Hilbert dado y sea  $u \in \mathcal{H}$  una función que no pertenece a  $W$ . Entonces, existe una única función  $v_0 \in W$  tal que:*

$$d(u, W) = \|u - v_0\|_{\mathcal{H}}$$

*Además  $v_0$ , es el único vector mínimo relativo a  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  si y solo si*

$$(u - v_0) \perp W$$

Podemos ahora, reformular el problema I de la siguiente forma:

**Problema I** *Encontrar una función  $\sigma \in \mathcal{H}$  que cumpla las siguientes condiciones:*

1.  $\sigma \in X_I$  donde  $X_I = \{u | u(x_i) = u_i, \quad i = 1, \dots, N\}$ , donde  $u_i$  son datos.
2.  $\sigma = \inf_{u \in X_I} \|u\|_{\mathcal{H}}$

Asumiremos ahora que el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tiene un kernel reproductor  $K$ . Entonces no es difícil ver que:

$$X_I = \{u | \ll u | K_{t_i} \gg_{\mathcal{H}} = u_i, \quad i = 1, \dots, N\}$$

es una variedad lineal o coset del espacio lineal dado por :

$$X_I^0 = \{u | \ll u | K_{t_i} \gg_{\mathcal{H}} = 0, \quad i = 1, \dots, N\}$$

Ahora conforme el Teorema (7),  $\sigma \in \mathcal{H}$  es la nica función que satisface  $X_I \cap X_I^{0\perp}$ , donde:

$$X_I^{0\perp} = \left\{ v \in \mathcal{H} \mid v = \sum_{i=1}^N \lambda_i K(t, t_i) \right\}$$

es el espacio ortogonal a  $X_I^0$ . Para ver que  $X_I^{0\perp}$  es el espacio ortogonal a  $X_I^0$ , notemos que:

$$u \in X_I^0 \text{ y } v \in X_I^{0\perp} \iff \ll u | v \gg_{\mathcal{H}} = 0$$

## Spline Cúbico

Sea  $H^2(0, 1)$  el espacio estándar de Sobolev

$$H^2(0, 1) = \{u \in L^2(0, 1) \mid u, u', u'' \in L^2(0, 1)\}$$

dotado con el producto interior:

$$\ll u | v \gg_{H^2(0,1)} = u(0)v(0) + u(1)v(1) + \langle u'' | v'' \rangle_{L^2(0,1)}$$

Integrando por partes, notamos que:

$$\frac{d^4}{dx^4} f(x, t) = \delta(x - t)$$

donde  $f(x, t) = (x - t)_-^3$ , es la solución fundamental del operador  $\frac{d^4}{dx^4}$ . A partir de este resultado es posible determinar que el kernel reproductor está dado por:

$$K(x, t) = \frac{1}{6}((x - t)_+^3 + (t - 1)x^3 + (t^3 - 3t^2 + 2t)x + xt + (1 - x)(1 - t))$$

Tenemos así que, el spline cúbico está dado por:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i K(t, t_i)$$

No es difícil verificar que  $\sigma$ , es un polinomio cúbico por piezas, tal que  $\sigma \in C^0$ ,  $\sigma' \in C^0$ ,  $\sigma'' \in C^0$  y que  $\sigma(0) = u''(0) = 0$  y  $\sigma(1) = u''(1) = 0$ .

## Spline de Capa Delgada

El spline de capa delgada fue construido, a partir de un problema de minimización en el espacio Beppo Levi

$$V^m(\mathbb{R}^d) = \{u | D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}), \quad |\alpha| = m\}$$

donde  $\alpha$  denota el multi índice  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  y  $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ . El semi producto interior  $V^m(\mathbb{R}^d)$  está dado por:

$$\langle v | u \rangle_{m, \mathbb{R}^d} = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u D^\alpha v \quad (11)$$

Se puede probar que :

$$\llangle v | u \rrangle_{m, \mathbb{R}^d} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} l_i(u) l_i(v) + \langle v | u \rangle_{m, \mathbb{R}^d} \quad (12)$$

es un producto interno en  $V^m(\mathbb{R}^d)$ . Integrando por partes la ecuación (12), obtenemos que:

$$\llangle v | u \rrangle_{m, \mathbb{R}^d} = \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta^{2m} u) v + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} l_i(u) l_i(v) \quad (13)$$

donde  $\Delta^{2m}$  es la iteración del operador de Laplace, y la función radial dada por:

$$\Phi_{m,d}(|x|) = \begin{cases} |x|^{2m-d} \log(|x|) & \text{para } d \text{ par;} \\ |x|^{2m-d} & \text{para } d \text{ impar.} \end{cases}$$

es su solución fundamental. Notemos que el espacio nulo de  $\Delta^{2m}$ , esta dado por el espacio de polinomios  $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}^d)$ .

Así el kernel reproductor  $V^m(\mathbb{R}^d)$  relativo a el producto interno (12) esta dado por:

$$K_{d,m}(|x|) = \Phi_{m,d}(|x|) + \mathcal{P}(r)$$

donde  $\mathcal{P}$  es el kernel reproductor del espacio de polinomios  $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}^d)$ . Por lo tanto, el spline de capa delgada esta dado por:

$$s(x) = \sum_{i=1} K_{d,m}(|x - x_i|) + p(x) \quad (14)$$

donde  $p \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R}^d)$ .

## Dada una Función de Base Radial Obtener el espacio de Hilbert

Primero establezcamos el Teorema clásico de Bochner :

**Teorema 8** *Una función  $\Phi$  es positiva definida si y solo si, existe una función no decreciente acotada  $\omega \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , tal que  $\Phi$  es la transformada de Fourier de  $\omega$ , ie.*

$$\Phi = \hat{\omega}(\xi)$$

donde

$$\hat{\omega}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \omega(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$

$y \langle x, \xi \rangle$ ,  $x, \xi \in \mathbb{R}^d$  es el producto interior en  $\mathbb{R}^d$ .

Sea

$$B = \{\Phi \in C(\mathbb{R}^d) : |\Phi(x)| \leq |p(x)| \text{ para alguna } p \in \mathbb{P}^T\}$$

donde  $\mathbb{P}^T$  es el espacio de polinomios sobre  $\mathbb{R}^d$ .

**Definición 7** *La Transformada de Fourier generalizada de  $\Phi \in B$ , es una funcional lineal del espacio de funciones de prueba de descenso rápido dado por:*

$$S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\mu D^\nu \varphi(x) = 0 \quad \mu, \nu \in \mathbb{N}_+^d\} \quad (15)$$

Cualquier funcional acotada de  $S$  es llamada **distribución temperada**.

Notemos que la transformada de Fourier de  $\varphi$  esta dada por:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$

con inversa:

$$\check{\varphi}(x) = \frac{1}{2\pi} \varphi(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi$$

Usando esta notación, podemos reescribir la transformada de Fourier generalizada como:

**Definición 8** Dada  $\Phi \in B$ . Entonces la transformada de Fourier generalizada  $\hat{\Phi}$  de  $\Phi$  es la funcional lineal de  $B$  dada por:

$$\hat{\Phi}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)\hat{\varphi}(x)dx \quad (16)$$

donde  $\varphi \in S$ .

**Definición 9** Sea  $\Phi \in B$ . Entonces su  $m$ -ésima transformada de Fourier generalizada esta definida por:

$$(\hat{\Phi})_m(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)\hat{\varphi}(x)dx \quad (17)$$

donde  $\varphi \in S_m$  y

$$S_m = \{\varphi \in S \mid \int_{\mathbb{R}^d} q(x)\hat{\varphi}(x)dx = 0, \quad q \in \mathbb{P}^{m-1}\}$$

Es ahora posible probar, la vigencia del siguiente Teorema : (ver Madich y Nelson)

**Teorema 9** Sea  $\Phi \in B$  tal que:

$$\Phi = (\hat{\omega})_{2m} \quad (18)$$

donde  $\omega$  es una función no negativa en  $\mathbb{R}^d$  que cumple:

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2m} \omega(\xi) d\xi < \infty \text{ y } \int_{|\xi| \geq 1} \omega(\xi) d\xi < \infty \quad (19)$$

Entonces para  $N$  puntos arbitrarios  $\{x_i\}_1^N$  en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Phi$  es condicionalmente definida positiva de orden  $m$ , es decir:

$$\sum_{i,j=1}^M c_i \hat{c}_j \Phi(x_j - x_i) \geq 0$$

siempre que  $\sum_{i=1}^N c_i x_i^\beta = 0$  para toda  $|\beta| < m$ . Además, si la igualdad se mantiene en (19), y se satisface la condición anterior, entonces  $\omega = 0$  o  $c_i = 0$  para toda  $i$ .



Entonces puede probarse, que si  $\omega$  satisface las condiciones del Teorema (9), el espacio dado por:

$$H_{\omega,m} = \{u | (\hat{u})_m \in L^2(\omega^{-1})\}$$

con el semi-producto interior:

$$(v, u)_{\omega,m} = \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{u})_m (\widehat{\bar{v}})_m$$

es un semi espacio de Hilbert. Notemos que:

$$v \in H_{\omega,m}, \quad (v, u)_{\omega,m} = 0 \quad \text{si y solo si } v \in \mathbb{P}^{m-1}$$

Para resolver el problema variacional en  $H_{\omega,m}$ , es necesario garantizar la existencia de un semi-kernel reproductor. Este resultado esta dado por el siguiente Teorema:

**Teorema 10** *Sea  $\Phi \in C(\mathbb{R}^d)$  una función radial tal que se cumplen (18) y (19). Entonces  $\Phi$  es condicionalmente definida positiva de orden  $m$  en  $\mathbb{R}^d$ . Además, la función  $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x, y) = \Phi(x - y)$ , es el semi-kernel reproductor de  $H_{\omega,m}$ .*

Podemos usar el spline de capa delgada para ilustrar este punto. Primero recordemos el siguiente resultado.

**Teorema 11** *Sea  $q$  una distribución temperada, entonces para toda  $\alpha \in \mathbb{Z}$*

$$\left( \widehat{D_x^\alpha} \right) = (i\xi)^\alpha \hat{q}$$

y

$$D_x^\alpha \hat{q} = \left( \widehat{(-ix)^\alpha q} \right)$$

Usando la identidad de Parseval tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^d} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u} \widehat{\bar{v}} dx$$

notemos que los elementos de  $V^m(\mathbb{R}^d)$  son distribuciones temperadas, tenemos que:

$$\langle v | u \rangle_{m, \mathbb{R}^d} = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{D^\alpha u}} \widehat{D^\alpha v} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{|\alpha|=m} (\xi)^{2\alpha} \hat{u} \bar{\hat{v}} \right) d\xi$$

donde  $\omega^{-1}(\xi) = |\xi|^{2m}$ .

## 1.5. Estimación de error en espacios Nativos

Con objeto de obtener el orden de convergencia de los interpolantes radiales en los correspondientes espacios nativos, introducimos primero el concepto de *distancia llena*, equivalente al parámetro espacial de malla, para nodos aleatorios

$$h = h_{\mathcal{X}, \Omega} = \sup_{x \in \Omega} \min_{x_j \in \mathcal{X}} \|x - x_j\|_2.$$

La distancia llena, denota el radio de la bola más grande posible que puede ser colocada entre los datos.

Con objeto de obtener la estimación de errores de los interpolantes, introduciremos primero el concepto de función cardinal  $u^*$ .

**Teorema 12** *Supongamos que  $\Phi$  es un kernel estrictamente positivo definido en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, para cualesquiera puntos distintos  $x_1, \dots, x_N$ , existen funciones  $u^* \in \{\Phi(\cdot, x_j), j = 1, \dots, N\}$  tales que  $u_j^*(x_i) = \delta_{ij}$ .*

Por lo tanto podemos escribir  $s_0 f$ , la ecuación (1), en la forma cardinal como:

$$s_0 f(x) = \sum_{j=1}^N f(x_j) u_j^*(x) \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Otro importante ingrediente para obtener la estimación del orden de convergencia, es la **llamada función potencia**. Para este fin, consideremos un dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ . Entonces, para cualquier kernel estrictamente positivo definido  $\Phi \in C(\Omega \times \Omega)$  y para cualquier conjunto de puntos  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ , definimos la forma cuadrática:

$$\begin{aligned} Q(u) &= \Phi(x, x) - 2 \sum_{j=1}^N u_j \Phi(x, x_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N u_i u_j \Phi(x_i, x_j) \\ &= \langle \Phi(\cdot, x), \Phi(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{N}_\Phi(\omega)} - 2 \sum_{j=1}^N u_j \langle \Phi(\cdot, x_j), \Phi(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{N}_\Phi(\omega)} \\ &= \langle \Phi(\cdot, x) - \sum_{j=1}^N u_j \Phi(x, x_j), \Phi(\cdot, x) - \sum_{j=1}^N u_j \Phi(x, x_j) \rangle_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)} \end{aligned}$$

$$= \left\| \Phi(\cdot, x) - \sum_{j=1}^N u_j \Phi(x, x_j) \right\|_{\mathcal{N}_\Phi(\omega)}^2$$

**Definición 10** Supongamos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  y  $\Phi \in (\Omega \times \Omega)$  es estrictamente definida positiva en  $\mathbb{R}^d$ . Para cualesquiera puntos diferentes  $\chi = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \Omega$  la función potencia se definen por:

$$[P_{\Phi, \chi(x)}]^2 = Q(u^*(x))$$

donde  $u^*$ , es el vector de las funciones cardinales del Teorema (12).

**Teorema 13** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  y  $\Phi \in (\Omega \times \Omega)$  estrictamente positiva definida en  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que los puntos  $\chi = \{x_1, \dots, x_N\}$  son distintos. Denotemos el interpolante para  $f \in \mathcal{N}_\Phi(\omega)$  en  $\chi$  por  $Pf$ . Entonces para toda  $x \in \Omega$

$$|f(x) - Pf(x)| \leq P_{\Phi, \chi(x)} \|f\|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)}$$

El siguiente paso es refinar este error, de modo que la estimación se pueda expresar en términos de la distancia llena. El orden de convergencia dependerá, como es de esperarse, de la función de base radial  $\Phi$ .

**Teorema 14** Supongamos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  es un abierto acotado y que el interior satisface la condición del cono. Supongamos que  $\Phi \in C^{2k}(\Omega \times \Omega)$  es simétrica y estrictamente condicional positiva definida de orden  $m$  en  $\mathbb{R}^d$ . Denotemos el interpolante para  $f \in \mathcal{N}_\Phi(\Omega)$  en el  $(m-1)$  conjunto  $\chi$  por  $\mathcal{P}f$ . Fijemos  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  con  $|\alpha| \leq k$ . Entonces existe una constante positiva  $h_0$  y  $C$  (independiente de  $x$ ,  $f$  y  $\Phi$ ) tal que:

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha \mathcal{P}f(x)| \leq CC_\Phi(x)^{1/2} h_{\chi, \Omega}^{k-|\alpha|} \|f\|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)}$$

siempre que  $h_{\chi, \Omega} \leq h_0$ . Aquí:

$$C_\Phi(x) = \max_{\substack{\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta| + |\gamma| = 2k}} \max_{\omega, z \in \Omega \cap B(x, c_2, h_{\chi, \Omega})} |D_1^\beta D_2^\gamma \Phi(\omega, z)|$$

Es posible mostrar que para la **Gausiana**:

$$\|f(x) - Pf(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq e^{-\frac{c|\log h_{\chi,\Omega}|}{h_{\chi,\Omega}}} \|f(x)\|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)}$$

Tenemos el correspondiente resultado para el (inverso) **multicuatrico**

$$\|f(x) - Pf(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq e^{\frac{-c}{h_{\chi,\Omega}}} \|f(x)\|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)}$$

Para las **potencias**  $\Phi(r) = (-1)^{\lceil\beta/2\rceil} r^{\lceil\beta\rceil}$ ,  $\beta > 0, \beta \neq 2\mathbb{N}$ , tenemos que:

$$\|f(x) - Pf(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq ch^{\frac{\beta}{2}-|\alpha|} \|f(x)\|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)}$$

siempre que  $|\alpha| \leq \frac{\lceil\beta/2\rceil-1}{2}$  y  $f \in \mathcal{N}_\Phi(\Omega)$ .

Para **el spline de capa delgada**  $\Phi(\|x\|) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|$  tenemos que:

$$\|f(x) - Pf(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq ch^{k-|\alpha|} \|f(x)\|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)}$$

siempre que  $|\alpha| \leq k - 1$  y  $f \in \mathcal{N}_\Phi(\Omega)$ .

## 1.6. Métodos de Precondicionamiento

El método GMRES, (Residuo mínimo generalizado), es una técnica iterativa que puede ser usada para resolver sistemas no simétricos (no definidos). Para que la convergencia sea rápida, la matriz debe ser previamente precondicionada, de tal modo que sus valores propios se acumulan alrededor del 1 y lejos del origen.

Obviamente, si las funciones base usadas para el espacio de funciones de base radial fueran **funciones cardinales**, entonces la matriz sería la matriz identidad, con todos sus valores propios iguales a 1. Por lo tanto, el método GMRES convergiría a una iteración. Consecuentemente, la estrategia para usar eficientemente el método GMRES, consiste en obtener una matriz  $B$  que sea cercana en términos espectrales la inversa de  $A$ . Encontrar cada función

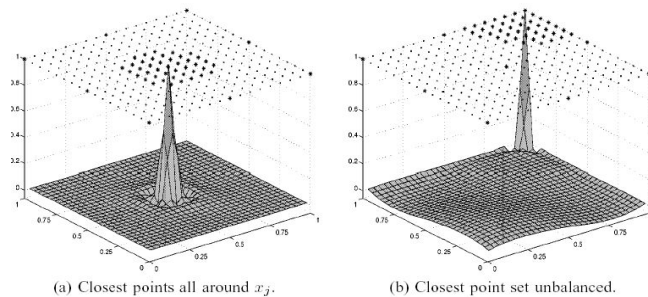


Figure 1: Centros locales y puntos especiales para la aproximación de la función cardinal

cardinal exacta es demasiado caro (esto involucraría para cada función al menos tanto trabajo como el que se requiere para resolver el problema de interpolación), por ello Shu, propuso la idea de encontrar funciones cardinales aproximadas.

Dados los centros  $x_1, \dots, x_N$ , la  $j$ -ésima función cardinal aproximada, esta

dada como una combinación lineal de las funciones base  $\phi_i = \phi(\|\cdot - x_i\|)$ , donde  $i$  corre sobre algún subconjunto  $\mathcal{S}_j$  de  $\{1, \dots, N\}$ , i.e,

$$\Psi_j = \sum_{i \in \mathcal{S}_j} b_{ij} \phi(\|\cdot - x_i\|) + p_j \quad (20)$$

donde (para el caso condicionalmente definido positivo)  $p_j$  es un polinomio en  $\mathbb{P}_{m-1}^d$  y los coeficientes  $b_{ij}$  satisfacen las condiciones de momento :

$$\sum_{i=1}^N b_{ij} p_j(x_i) = 0 \quad \text{para toda } p_j \in P_{m-1}^d$$

La clave en el diseño de la aproximación a la función cardinal es tener algunos coeficientes  $n \ll N$  en (20) distintos de cero. En este caso, la función  $\Psi_j$  se encuentra resolviendo un pequeño sistema lineal de  $n \times n$ , que es mucho más eficiente de resolver.

Con objeto de evitar oscilaciones en las funciones cardinales aproximadas, esta estrategia se mejora **añadiendo, puntos especiales que son distribuidos de forma esparsa por todo el dominio**. Si los centros de interpolación son distribuidos dentro del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  y buscamos 4 puntos especiales, entonces estos podrían ser elegidos como los centros de los cerrados  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$ , respectivamente, ver Figura 1.

Un segundo elemento que es central para este algoritmo, consiste en imponer condiciones de decaimiento para todas las funciones cardinales aproximadas,  $\phi_j$ , es decir una condición que implique que  $\phi_j$  decae cuando  $x$  se mueve lejos de  $x_j$ . Esta condición implica en términos teóricos que la función cardinal aproximada es un elemento del espacio nativo. Encontramos  $\phi_j$  resolviendo el problema restringido de mínimos cuadrados

$$\phi_j \approx \delta_{ij}, \quad i \in \mathcal{S}_j$$

sujeto a:

$$\phi_j(x) = \mathcal{O}(|x|^{-3}) \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty$$

## 2. Métodos para la Quasinterpolación Multivariada

Asumamos primero que las siguientes condiciones sobre la Formula de Green se cumple, (ver, Aubin, 1979)

Sea el operador:  $\Lambda : H(\Omega) \rightarrow H_0^*(\Omega)$ , relativo a la forma bilineal continua  $F : H(\Omega) \times H(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\langle \Lambda u | v \rangle = F(u, v) \quad \forall u \in H(\Omega), \quad \forall v \in H_0(\Omega).$$

Definimos esta *dominio* por  $H(\Lambda) = \{u \in H(\Omega) \text{ tal que } \Lambda u \in V(\Omega)\}$  y asumimos que la siguiente relación se cumple:

$$\forall u \in H(\Lambda), \quad \forall v \in H(\Omega) \quad F(u, v) = F^\Omega(u, v) + F^{\partial\Omega}(u, v) \quad (21)$$

donde,

$$F^\Omega(u, v) = \langle \Lambda u | v \rangle \quad (22)$$

y

$$F^{\partial\Omega}(u, v) = \langle \delta u | \gamma v \rangle \quad (23)$$

En la ecuación anterior  $\delta$  y  $\gamma$  son operador traza apropiadamente definidos. Sea  $E$  la solución fundamental del operador  $\Lambda$ . De modo que la siguiente formula es valida

$$F^\Omega(E_t, v) = \langle \Lambda E_t | v \rangle = \rho_t(v), \quad \rho_t \in V(\Omega) \quad (24)$$

Asumamos además que el espacio de polinomios  $\mathbb{P}^r(\Omega)$  es un subconjunto del espacio nulo de los operadores  $\Lambda$ ,  $\delta$  y  $\gamma$ , donde  $r$  depende de la forma particular de cada operador. Además, sea  $F_h^\Omega$  y  $F_h$ , **alguna discretización completa** de  $F^\Omega$ , ver ecuación (22) y  $F$ , ver ecuación (21) respectivamente, en el sentido de que la siguiente relación:

$$F_h^\Omega(u, v) = \langle \Lambda_h u | v_h \rangle; \quad F_h^\Omega(p^{l_1}, p^{l_2}) = 0 \quad (25)$$

y

$$F_h(u, v) = \langle u_h | v_h \rangle; \quad F_h(p^{l_3}, p^{l_4}) = 0 \quad (26)$$

se cumpla.

Asumiremos que,  $F_h^{\partial\Omega}$  es una **semidiscretización** de la (23) en el sentido de que la siguiente relación:

$$F_h^{\partial\Omega}(u, v) = \langle \delta u | \gamma_h(v) \rangle; \quad F_h^{\partial\Omega}(u, p^{l_5}) = 0 \quad (27)$$



es válida. Donde en las ecuaciones anteriores,  $p^i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  son polinomios en  $\Omega$  de grado  $\{l_i\}_1^5$ . Es importante subrayar que en  $F_h^{\partial\Omega}$  **la discretización se efecta solo en la función  $v$ , mientras que  $u$  queda como una función continua**. Esto es por que decimos que se trata de una semi discretización en vez de una discretización de la forma bi lineal. En las ecuaciones (25), (26) y (27),  $\Lambda_h$ ,  $\gamma_h$  y  $v_h$  son discretizaciones conformes de  $\Lambda$ ,  $\gamma$  y  $v$ , respectivamente. *Notemos sin embargo, que el marco anterior puede mantenerse para discretizaciones no conformes.*

Tenemos ahora las siguientes dos definiciones de quasi-interpolantes *discretos* y *semi discretos*.

**Definición 11** Diremos que  $Q_h u$  es un quasi interpolante discreto relativo a  $F^\Omega$ , ver ecuación (22), si este se define por la siguiente relación:

$$Q_h u(t) = F_h^\Omega(E, u). \quad (28)$$

donde  $F_h$  satisface la ecuación (25).

y tenemos que:

**Definición 12** Diremos que  $V_h u$  es un quasi interpolante semi-discreto relativo a  $F$ , ecuación (21), si este se define por la siguiente relación:

$$V_h u(t) = F_h(E, u) - F_h^{\partial\Omega}(E, u) \quad (29)$$

donde  $F_h$  y  $F_h^{\partial\Omega}$  satisface la ecuación (26) y (27), respectivamente.

Claramente no existe una nica forma de definir la discretización para  $F^\Omega$  y consecuentemente es posible construir diferentes quasi interpolantes, dependiendo del esquema de discretización que usemos.

## 2.1. Ejemplo: Quasi Interpolante Discreto y semi discreto

**Teorema 15** Sea  $u \in H^2(\Omega)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto abierto con frontera  $\partial\Omega$ . Entonces para toda  $t \in \Omega$  se tiene que:

$$F^\Omega(u, \rho_t(E)) = \rho_t(u) = \int_{\Omega} u(s) \Delta(\rho_t(E(\cdot, s))) ds. \quad (30)$$

**Teorema 16** Sea  $u \in H^2(\Omega)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto abierto acotado con frontera poligonal  $\partial\Omega$ . Entonces para toda  $t \in \Omega$

$$\rho_t(u) = F(u, \rho_t(E)) + F^{\partial\Omega}(\rho_t(E), u) \quad (31)$$

donde

$$F(u, \rho_t(E)) = \int_k \{\partial_x u \partial_x \rho_t(E) + \partial_y u \partial_y \rho_t(E)\} dx dy.$$

y

$$F^{\partial\Omega}(\rho_t(E), u) = \int_{\partial\Omega} \partial_n u(s) \rho_t(E(\cdot, s)) d\gamma(s)$$

En el Teorema anterior  $E$  es la solución fundamental de el operador de Laplace y

$$\rho_t(u) = \frac{1}{\text{area}(\omega_t)} \int_{\omega_t} u(s) ds \quad (32)$$

Entonces,

**Definición 13** Diremos que  $Q_h u$  es un quasi interpolante discreto relativo para  $F^\Omega$ , ecuación (30), si este se define por la siguiente relación

$$Q_h u(t) = F_h^\Omega(u, \rho_t(E)). \quad (33)$$

**Definición 14** Diremos que  $\mathcal{Q}_h(u)$  es un quasi interpolante, semi discreto si este es una discretización de la ecuación (31), dada por

$$V_h u = F_h(u, \rho_t(E)) - F_h^{\partial\Omega}(\rho_t(E), u) \quad (34)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \rho_t(E(\cdot, s)) &= \frac{1}{\pi d^2} \int_{\omega_t} E(t-s) ds \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi d^2} \{|t-s|^2 - d^2\} + \frac{1}{2\pi} \log(|d|) & \text{if } |t-s| > d \\ \frac{1}{2\pi} \log|t-s| & \text{if } |t-s| \leq d. \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

### 3. Solución Numérica de PDE con RBF

En esta sección estudiaremos dos métodos de colocación para la solución de EDP, llamados: método asimétrico y simétrico. Adicionalmente, revisaremos el método de cuadratura diferencial.

### 3.1. Colocación Asimétrica

Consideremos el siguiente problema de Dirichlet:

$$Lu = f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

sujeto a las condiciones de frontera:

$$u = g \quad \text{en } \partial\Omega$$

Usaremos el siguiente anizat para discretizar el problema anterior

$$u_\phi(\cdot) = p(\cdot) + \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi(\cdot - x_j)$$

Así, el sistema discretizado puede ser expresado como sigue:

$$\begin{aligned} Lu_\phi(x) &= f(x) \quad x \in \Omega \\ u_\phi &= g \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Lp(\cdot) + \sum_{j=1}^N \lambda_j L\Phi(\cdot - x_j) &= f_i \quad i = 1, \dots, N \\ p(x_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi(x_i - x_j) &= g_i \quad i = N_I + 1, \dots, N \end{aligned}$$

sujeto a las condiciones de momento:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j q(x_j) = 0, \quad \text{para toda } q \in P_k^d.$$

$$\begin{bmatrix} W_L & P_L \\ W_B & P_B \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

donde:

$$(W_L)_{ij} = L\Phi(x_i - x_j), \quad x_i \in X_I, x_j \in X \quad (37a)$$

$$(W_B)_{i-N_I j} = \Phi(x_i - x_j), \quad x_i \in X_I, x_j \in X \quad (37b)$$

$$(P_L)_{ij} = LP_j(x_i), \quad x_i \in X_I \quad (37c)$$

$$(O_B)_{i-N_I j} = P_j(x_i), \quad x_i \in X_B \quad (37d)$$

### 3.2. Colocación Simétrica

En este caso consideraremos el siguiente anizat:

$$u_\phi(\cdot) = p(\cdot) + \sum_{j=1}^{N_I} \lambda_j \tilde{L}\Phi(\cdot - x_j) + \sum_{j=N_I+1}^N \lambda_j \Phi(\cdot - x_j) \quad (38)$$

donde  $\tilde{L}$  es el operador  $L$  pero ahora actuando sobre el segundo argumento,  $x_j$ . Notemos que el valor absoluto de  $\tilde{L}\Phi(x - y)$  y  $L\Phi(y - x)$  son iguales para cualquier  $x$  y  $y$ . Para cada elección de  $u_\phi$  en la ecuación (38), donde  $\phi$  es la función radial que determina el esquema numérico, la matriz de colocación conduce al sistema algebraico:

$$\begin{bmatrix} W_{L\tilde{L}} & W_I & P_L \\ W_{\tilde{L}}^T & W_B & P_B \\ P_L^T & P_B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

donde las matrices en (39) están dadas por:

$$(W_{L\tilde{L}})_{ij} = L\tilde{L}\Phi(x_i - x_j), \quad x_i, x_j \in X_I \quad (40a)$$

$$(W_L)_{i,j-N_I} = L\Phi(x_i - x_j), \quad x_i \in X_I, x_j \in X_B \quad (40b)$$

$$(W_{\tilde{L}})_{ij} = \tilde{L}\Phi(x_i - x_j), \quad x_i \in X_I, x_j \in X_B \quad (40c)$$

$$(W_{B\tilde{L}})_{i-N_I,j-N_I} = \tilde{L}\Phi(x_i - x_j), \quad x_i, x_j \in X_B \quad (40d)$$

y  $P_L$  y  $P_B$  son las mismas que en (36). La ventaja principal de esta formulación, es que es que la matriz del sistema es simétrico y no singular (39). No obstante las RBF en (38) no son tan comnmente usadas como la colocación simétrica formulada por Kansa original, en parte debido a que la aplicación extra del operador  $L$  implica que  $\Phi$  debe tener mayor diferenciabilidad. Para la colocación no lineal es posible usar (38) pero aumenta la complejidad del método.

### 3.3. Método de Cuadratura Diferencial

El método de Cuadratura Diferencial es una técnica de discretización numérica para la aproximación de derivadas. La esencia de este método es que la

derivada parcial de una función desconocida con respecto a una variable independiente es aproximada por una suma de funciones valuadas en puntos dentro de su soporte. Supongamos que una función  $f(x)$  es suficientemente suave. Entonces su derivada de orden  $m$  con respecto a  $x$  en el punto  $x_i$  puede ser aproximada usando el Método de Cuadratura Diferencial como :

$$\left. \frac{\partial^m f}{\partial x^m} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N \omega_{ij}^{(m)} f(x_j) \quad (41)$$

Usaremos el Multicuadrado como función base para determinar el peso de los coeficientes en la aproximación de las derivadas, para un problema de dos dimensiones. Sin embargo, el método puede ser fácilmente extendido en el caso de usar otras RBF como funciones base.

Supongamos que la solución de la PDE es continua, la cual puede ser aproximada por este método localmente, y solo una constante es incluida en el termino  $\omega_{ij}$  del polinomio. Como se muestra en la Fig. 1, en cualquier nodo, hay una región de soporte, en la cual hay  $N$  nodos aleatoriamente distribuidos. La función en esta región puede ser localmente aproximada por este Método usando RBF como:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c_j^2} + \lambda_{N+1} \quad (42)$$

Para hacer un buen planteamiento del problema se requiere de más ecuaciones. De la Eq. (3), tenemos:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 0 \quad \lambda_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_j \quad (43)$$

Sustituyendo la Eq.(43) en la Eq.(42) obtenemos:

$$f(x, y) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_j g_j(x, y) + \lambda_{N+1} \quad (44)$$

donde:

$$g_j(x, y) = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c_j^2} - \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + c_i^2} \quad (45)$$

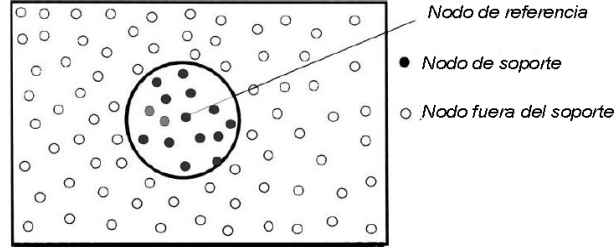


Figure 2: Nodos del soporte y nodos de referencia para el método DQ

El número de incógnitas en la Eq. (44) es  $N$ . Para evitar confusiones,  $\lambda_{N+1}$  puede ser reemplazado por  $\lambda_i$ , y la Eq. (44) puede ser reescrita como:

$$f(x, y) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_j g_j(x, y) + \lambda_i$$

Sustituyendo todas las funciones base en la Eq.(41), podemos obtener:

$$0 = \sum_{j=1}^N \omega_{ik}^{(m)} \quad (46)$$

$$\frac{\partial^m g_j(x_i, y_i)}{\partial x^m} = \sum_{k=1}^N \omega_{ik}^{(m)} g_j(x_k, y_k) \quad j = 1, 2, \dots, N, \text{ but } j \neq i. \quad (47)$$

Para una  $i$  dada, el sistema de ecuaciones (47) tiene  $N$  incógnitas con  $N$  ecuaciones. Así, resolviendo este sistema de ecuaciones podemos obtener el peso de los coeficientes  $\omega_{ik}^{(m)}$ . De la Eq.(45), puede obtener fácilmente la derivada de primer orden de  $g_j(x, y)$  que es:

$$\frac{\partial g_j(x_i, y_i)}{\partial x} = \frac{x - x_j}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c_j^2}} - \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + c_i^2}} \quad (48)$$

La segunda y las derivadas de orden superior  $g_j(x, y)$  pueden también ser obtenidas por diferenciación de la Eq. (45) sucesivamente. De manera similar, el peso de los coeficientes de las derivadas para y pueden calcularse.

### **Normalización de la región de soporte**

El número de nodos  $n$  en el soporte para el método de Cuadratura diferencial con Multicuadrático, usualmente es fijado para una aplicación. Ya que los nodos son aleatoriamente generados, la escala de la región de soporte para cada nodo podría ser diferente, y el parámetro óptimo  $c$  para el resultado numérico exacto puede ser también diferente. *Usualmente, es muy difícil asignar diferentes valores para  $c$  en diferentes nodos*. Sin embargo, esta dificultad puede ser removida por la normalización de la escala en la región de soporte.

**La idea esencial, es transformar el soporte local en el círculo unitario en el caso de dos dimensiones o en la esfera unitaria para el caso de tres dimensiones.** Así, la discusión acerca de el parámetro óptimo es confinada a la función de prueba Multicuadrática en el círculo o esfera unitarios. El cambio de coordenadas tiene la forma:

$$\bar{x} = \frac{x}{D_i}, \quad \bar{y} = \frac{y}{D_i} \quad (49)$$

donde  $(x, y)$  representa las coordenadas de la región de soporte en el espacio físico,  $(\bar{x}, \bar{y})$  denota las coordenadas en el círculo unitario,  $D_i$  es el diámetro del mínimo círculo que contiene todos los nodos en la región de soporte para el nodo  $i$ . La correspondiente función de prueba Multicuadrática en el soporte local se convierte en:

$$\phi = \sqrt{\left(\bar{x} - \frac{x_i}{D_i}\right)^2 + \left(\bar{y} - \frac{y_i}{D_i}\right)^2 + \bar{c}^2}, \quad i = 1, \dots, N$$

donde  $N$ , es el número total de nodos en el soporte. Comparado con la forma tradicional del Multicuadrático con RBF, podemos encontrar que el parámetro  $c$  es equivalente a  $\bar{c}D_i$ . El cambio de coordenadas (49) también cambia la formulación de el peso de los coeficientes, en la aproximación con el multicuadrático usando cuadratura diferencial. Por ejemplo, si usamos la regla de la cadena para la derivada, la derivada parcial de primer orden con

respecto a  $x$  puede escribirse como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{1}{D_i} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{D_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij}^{(1)} f_j = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{ij}^{(1)}}{D_i} f_j$$

donde  $\omega_{ij}^{(1)}$  son, los pesos de los coeficientes calculados en el círculo unitario y  $\omega_{ij}^{(1)}/D_i$  **es el actual peso de los coeficientes en el dominio físico**. Claramente, cuando  $D_i$  es cambiado, el equivalente  $c$  en el espacio físico es automáticamente cambiado. En nuestra aplicación,  $\bar{c}$  es elegido como una constante. Este valor optimo depende del número de nodos en el soporte.



## 4. Referencias

Incluimos aquí, algunas referencias, las cuales consideramos básicas para estas notas. La lista es muy completa. Parte del contenido de estas notas, fue basado en el trabajo de Fasshauer, [2]. Recomendamos al estudiante leer este trabajo.

### Referencias Básicas

[1] M. D. Buhmann, Radial functions on compact support, Proc. Edin. Math. Soc. II 41 (1998), 33-46.

[2] Fasshauer G.E., Meshfree Methods, to appear in Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology, M. Rieth and W. Schommers (eds.).

### Referencias

[3] W. R. Madych and S. A. Nelson, Multivariate interpolation: a variational theory, manuscript, 1983.

[4] C. A. Micchelli, Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions, Constr. Approx., 2 (1986), 11-22.

[5] R. Schaback, Native Hilbert spaces for radial basis functions I, in New Developments in Approximation Theory, M. W. Muller, M. D. Buhmann, D. H. Mache and M. Felten (eds.), Birkhauser, Basel, 1999, 255-282.

[6] R. Schaback, A unified theory of radial basis functions. Native Hilbert spaces for radial basis functions II, J. Comput. Appl. Math. 121 (2000), 165-177.

[7] I. J. Schoenberg, Metric spaces and completely monotone functions, Ann. of Math., 39 (1938), 811-841.

[8] E. J. Kansa, Multiquadrics, A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics - II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, Comput. Math. Appl., 19 (1990), 147-161.

[9] E. J. Kansa, A strictly conservative spatial approximation scheme for the governing engineering and physics equations over irregular regions and inhomogeneous scattered nodes, Comput. Math. Appl., 24 (1992), 169-190.

- [10] N. Dyn, Interpolation and approximation by radial and related functions, in *Approximation Theory VI*, C. Chui, L. Schumaker, and J. Ward (eds.), Academic Press, New York, 1989, 211-234.
- [11] C. Shu, H. Ding, K.S. Yeo, Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2003) 941-954.
- [12] Powell M.J.D., The theory of radial basis function approximation in 1990, in: *Advances in numerical analysis II: wavelets, subdivision and radial basis functions*, (Ed. Light W.A.), Clarendon Press, Oxford 1992, 105-210.
- [13] Fasshauer G.E., Solving differential equations with radial basis functions: multilevel methods and smoothing, *Advances in Comp. Math.* 11 (1999), 139 159.
- [14] Duchon J., Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces, in: *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, (Eds. Schempp W. and Zeller K.), Springer, Berlin 1977, 85 100.
- [15] P. Gonzalez-Casanova and C. Gout, *Int. J. Comput. Math.* **81** (2004), no. 12, 1445–1454.
- [16] P. Gonzalez-Casanova, *Neural Parallel Sci. Comput.* **5** (1997), no. 1-2, 257–274.